

# 第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

## 初三 第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 若  $m, n$  是方程  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$  的两个根, 则  $\frac{n}{m} - \frac{m}{n}$  的值是( )

- (A)  $\pm 2\sqrt{5}$ . (B)  $\pm 4\sqrt{5}$ . (C)  $\pm 6\sqrt{5}$ . (D)  $\pm 8\sqrt{5}$ .

2. 设  $\odot O$  的半径是5, 点  $P$  不在  $\odot O$  外, 若点  $O$  与  $P$  的距离  $|OP| = m^2 - 2m$

+ 2, 则  $m$  的取值范围是( )

- (A)  $m < -1$  或  $m > 3$ . (B)  $-1 \leq m \leq 3$ .  
(C)  $m \leq -1$ . (D)  $m \geq 3$ .

3. 如图1,  $\odot O$  内的点  $P$  在弦  $AB$  上, 点  $C$  在圆  $O$  上,  $PC \perp OP$ , 若  $BP = 2, AP = 6$ , 则  $CP$  的长等于( )

- (A)  $2\sqrt{3}$ . (B) 4. (C)  $2\sqrt{2}$ . (D)  $3\sqrt{2}$ .

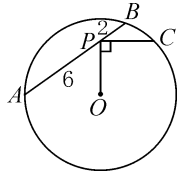


图1

4. 图2是类似“羊头”的图案, 它左右对称, 由正方形, 等腰直角三角形构成, 如果标有数字“13”的正方形的边长是 $\sqrt{2}$ , 那么标有数字“2”的等腰直角三角形斜边的长是( )

- (A) 4. (B)  $2\sqrt{2}$ . (C) 2. (D)  $\frac{3}{2}$ .

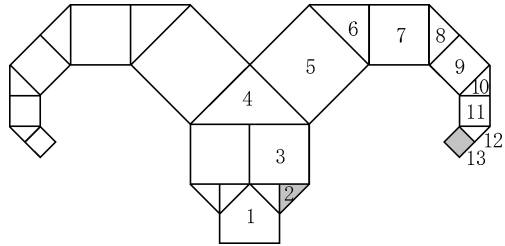


图2

5. 若  $m, n$  分别是 $\sqrt{20}$ 的整数部分和小数部分, 则与  $(m+n)(n-m)$  的差的绝对值最小的整数是( )

- (A) -55. (B) -56. (C) -16. (D) -15.

6. 如图3, 铁路  $MN$  和公路  $PQ$  在点  $O$  处交汇,  $\angle QON = 30^\circ$ . 点  $A$  在  $OQ$  上,  $AO = 240$  (米). 当火车行驶时, 周围200米以内会受到噪音的影响, 现有一列火车沿  $MN$  方向以72千米/时的速度行驶(火车的长度忽略不计), 那么,  $A$  处受噪音影响的时间为( )

- (A) 12秒. (B) 16秒. (C) 20秒. (D) 24秒.

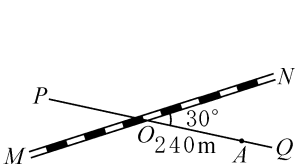


图3

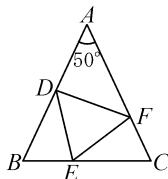


Fig. 4

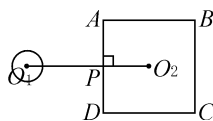


图5

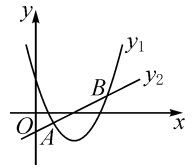


图6

7. In  $\triangle ABC$  as shown in fig. 4,  $AB = AC$ ,  $BD = EC$ ,  $BE = CF$ , if  $\angle A = 50^\circ$ , then the degree of  $\angle DEF$  is( )

- (A)  $60^\circ$ . (B)  $65^\circ$ . (C)  $70^\circ$ . (D)  $75^\circ$ .

8. 如图5,  $\odot O_1$  的半径是1, 正方形  $ABCD$  的边长是6, 点  $O_2$  是正方形  $ABCD$  的中心,  $O_1O_2$

垂直  $AD$  于  $P$  点,  $O_1O_2 = 8$ . 若将  $\odot O_1$  绕点  $P$  按顺时针方向旋转  $360^\circ$ , 在旋转过程中,  $\odot O_1$  与正方形  $ABCD$  的边只有一个公共点的情况一共出现( )

- (A) 3 次. (B) 5 次. (C) 6 次. (D) 7 次.

9. 如图 6, 在同一个坐标系内, 二次函数  $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和一次函数  $y_2 = dx + e (d \neq 0)$  的图象相交于点  $A(m, n)$  和点  $B(p, q)$ . 当  $y_1 < y_2$  时, 用  $m, p$  表示  $x$  的取值范围, 则是( )

- (A)  $m < x < p$ . (B)  $x < m$ . (C)  $x > p$ . (D)  $x > m$ .

10. 如图 7, 在正方形  $ABCD$  中, 点  $M, N$  分别在边  $AB, BC$  上运动(不与正方形的顶点重合), 且  $BN = 2AM$ , 若图中的三个阴影三角形中至少有两个相似, 则这样的点  $M$  有( )

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

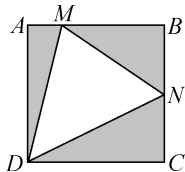


图 7

二、A 组填空题(每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 已知实数  $a, b$  不相等, 并且  $a^2 + 1 = 5a, b^2 + 1 = 5b$ , 则  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} =$  \_\_\_\_\_.

12. If  $a_1 = 1 - \frac{1}{m}, a_2 = 1 - \frac{1}{a_1}, a_3 = 1 - \frac{1}{a_2}, \dots$ , then  $a_{2013}$  in terms of  $m$  is \_\_\_\_\_.

13. 如图 8, 在  $3 \times 2$  的方格纸上, 以某三个格点为顶点的三角形中, 等腰三角形共有 \_\_\_\_\_ 个.

14. 若实数  $x, y, z$  使  $2x + y + z = 0$  和  $3x + 2y + 5z = 0$  成立, 并且  $z \neq 0$ , 则  $\frac{2x^2 - y^2 + 2z^2 - 4xy}{x^2 - 5z^2 + 7xz}$  的值是 \_\_\_\_\_.

15. 若一个三角形的三边的长是  $\sqrt{2}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$ , 则此三角形的面积是 \_\_\_\_\_.

16. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(-1, 0), (3, 0)$ , 当  $-2 \leq x \leq 5$  时,  $y$  的最大值为 12, 则该抛物线的解析式为 \_\_\_\_\_.

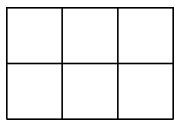


图 8

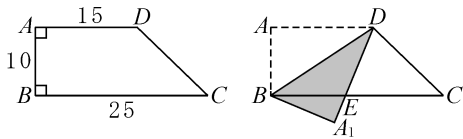


图 9

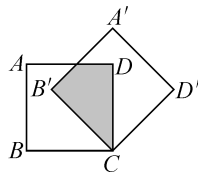


图 10

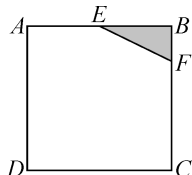


图 11

17. 如图 9, 直角梯形纸片  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC, AB \perp BC, AB = 10, BC = 25, AD = 15$ , 以  $BD$  为折痕, 将  $\triangle ABD$  折起, 旋转  $180^\circ$  后, 点  $A$  到点  $A_1$ , 则凹五边形  $BDCEA_1$  的面积为 \_\_\_\_\_.

18. 如图 10, 将边长为  $a$  的正方形  $ABCD$  绕其顶点  $C$  顺时针旋转  $45^\circ$ , 得四边形  $A'B'CD'$ , 则图中阴影部分的面积是 \_\_\_\_\_.

19. If  $\sqrt{(a+4)^2} - \sqrt{(a-3)^2} = 7$ , then the value range of real number  $a$  is \_\_\_\_\_.

20. 如图 11, 从边长为 5 的正方形纸片  $ABCD$  中剪去直角  $\triangle EBF$  (点  $E$  在边  $AB$  上, 点  $F$  在边  $BC$  上). 若  $EB + BF = \sqrt{15}$ , 则五边形  $AEFCDA$  的面积的最小值是 \_\_\_\_\_.

三、B 组填空题(每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 图 12 是由若干个棱长为 1 厘米的正方体堆成的几何体, 它的三视图中, 面积最大的是 \_\_\_\_\_ 平方厘米, 这个几何体的体积是 \_\_\_\_\_ 立方厘米.

22. 如图 13, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ, AB = AC = 2, BD$  是边  $AC$  上的高, 利用此图可求得

$\tan 15^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ .

23. 在直角坐标系内, 如果一个点的横坐标和纵坐标都是整数, 则称该点为整点. 若凸  $n$  边形的顶点都是整点, 并且多边形内部及其边上没有其它整点, 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

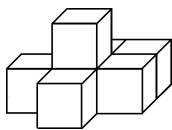


图 12

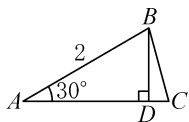


图 13

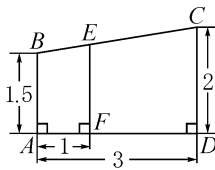


图 14

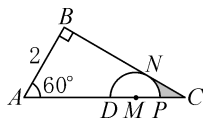


图 15

24. 如图 14, 直角梯形  $ABCD$  中,  $AB = 1.5, CD = 2, AF = 1, AD = 3, AB \parallel EF \parallel CD, \angle A = 90^\circ$ , 分别以  $AD, FE$  所在的直线为  $x$  轴,  $y$  轴建立坐标系 ( $AD, FE$  为正方向), 若抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $B, C$ , 并且它的顶点  $M$  在线段  $EF$  上, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

25. 如图 15,  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 90^\circ, \angle A = 60^\circ, AB = AD = 2$ , 点  $M$  在  $DC$  上, 以  $M$  为圆心, 以  $DM$  为半径的半圆切边  $BC$  于点  $N$ , 交  $MC$  于点  $P$ , 则  $DM = \underline{\hspace{2cm}}$ , 曲边  $\triangle NCP$  的面积 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**附加题** (每小题 10 分, 共 20 分.)

1. 若  $f(x) = 6x^3 - 11x^2 + ax - 6$  可以被  $g(x) = 2x - 3$  整除, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ , 当  $f(x) > 0$  时,  $x$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 有一堆黑, 白围棋子, 如果从中每次取出 3 枚黑子和 2 枚白子, 当黑子被取完或剩下 1 枚或 2 枚时, 则还剩 35 枚白子, 如果每次取出 5 枚黑子和 7 枚白子, 当白子被取完或剩下不足 7 枚时, 则还剩下 35 枚黑子, 那么这堆棋子中, 原有黑子  $\underline{\hspace{2cm}}$  枚, 白子  $\underline{\hspace{2cm}}$  枚.

## 初三 第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	B	C	B	B	B	A	B
题号	11		12		13		14		15	
答案	23		$m$		68		$\frac{11}{5}$		$\frac{5}{2}$	
题号	16					17		18		
答案	$y=x^2-2x-3$ 或 $y=-3x^2+6x+9$					$145\frac{5}{6}$		$(\sqrt{2}-1)a^2$		
题号	19		20		21		22			
答案	$a \geq 3$		$23\frac{1}{8}$		6; 7		$2-\sqrt{3}; \sqrt{6}-\sqrt{2}$			
题号	23			24			25			
答案	3 或 4			$\frac{1}{6}; 0; \frac{4}{3}$			$\frac{2}{3}; \frac{2}{9}\sqrt{3}-\frac{2}{27}\pi$			
题号	附加题 1					附加题 2				
答案	$7; x > \frac{3}{2}$					110; 107				