第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一　第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 集合 $M=\{x \mid y=\sqrt{-x^2+6x+7}, x, y \in \mathbf{R}\}$,$N=\{y \mid y=\sqrt{-x^2+6x+7}, x, y \in \mathbf{R}\}$,则集合 $M \cap N=$(　　)

(A) $\varnothing$.　　(B) $[-1,4]$.　　(C) $[-1,7]$.　　(D) $[0,4]$.

2. 设 m, n 是自然数,条件甲:m^3+n^3 是偶数;条件乙:$m-n$ 是偶数,则甲是乙的(　　)

(A) 充分不必要条件.　　(B) 必要不充分条件.

(C) 充分且必要条件.　　(D) 既不充分也不必要条件.

3. 已知直二面角 $\beta-l-\gamma$,直线 $a \subset$ 平面 β,直线 $b \subset$ 平面 γ,且 a 和 b 都不垂直于 l,那么,a 与 b(　　)

(A) 可能垂直,但不可能平行.　　(B) 不可能垂直,但可能平行.

(C) 可能垂直,也可能平行.　　(D) 不可能垂直,也不可能平行.

4. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的乘积,若 $a_9=1$,则下面的等式中正确的是(　　)

(A) $S_1=S_{19}$.　　(B) $S_3=S_{17}$.　　(C) $S_5=S_{12}$.　　(D) $S_8=S_{11}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=0$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2012}=$(　　)

(A) $-\sqrt{3}$.　　(B) 0.　　(C) $\sqrt{3}$.　　(D) $1006\sqrt{3}$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=60^\circ$,$2AB=3BC$,则 $\tan A$ 的值等于(　　)

(A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Suppose $\triangle ABC$ is a triangle with the side length of 2, D and E are moving points on the sides BC and AC. $AD \perp BE$ at point M, then the length of M's trajectory is(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$.

(英汉词典:trajectory 轨迹)

8. 若 $f(1,1)=1234$,$f(x,y)=k$,$f(x,y+1)=k-3$,则 $f(1,2012)=$(　　)

(A) -6033.　　(B) -4799.　　(C) 1235.　　(D) 2012.

9. 下面判断正确的是(　　)

(A) $b^2-4ac \geqslant 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解的充分且必要条件.

(B) $b^2-4ac<0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解的充分且必要条件.

(C) $c \neq 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解的必要不充分条件.

(D) $b^2-4ac>0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解的必要不充分条件.

10. 已知函数 $f(x)=m|x-1|$($m\in\mathbf{R}$, 且 $m\neq 0$). 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$, $\boldsymbol{b}=(2,2\sin\theta)$, $\boldsymbol{c}=(4\sin\theta,1)$, $\boldsymbol{d}=\left(\frac{1}{2}\sin\theta,1\right)$. 当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 与 $f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$ 的大小关系是(　　)

(A) $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(B) $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(C) $m>0$ 时, $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$; $m<0$ 时, $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(D) $m>0$ 时, $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$; $m<0$ 时, $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

二、A 组填空题(每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 设 $\alpha\in[0,2\pi)$, 则在 $[0,2\pi)$ 内, 终边与 α 角的终边关于 x 轴对称的角是__________.

12. 函数 $f(x)=3^{-|\log_2 x|}-4|x-1|$ 的值域是__________.

13. 若 a,b,c 是三个互不相等的实数, 且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+16a+14$, $bc=a^2-4a-5$, 则 a 的取值范围是__________.

14. 若 a,b 是正实数, 且 $a+b=2$, 则 $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ 的最小值是__________.

15. $y=a\sin(ax+b)+b$, if the minimum value of y is $\frac{1}{2}$, the maximum value is $\frac{5}{2}$, then $ab=$__________.

16. 设点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $GA=2\sqrt{3}$, $GB=2\sqrt{2}$, $GC=2$. 则 $\triangle ABC$ 的面积 $=$__________.

17. 已知 $0.8<x<0.9$, 若将 x, x^x, x^{x^x} 按从小到大的顺序排列, 应当是__________.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和是 S_n, 若 $S_8\leqslant 5$, $S_{11}\geqslant 23$, 则 a_{10} 的最小值是__________.

19. 若 $a\#b=a+b-ab$, 则下列等式中:

①$a\#b=b\#a$.　　②$a\#0=a$.　　③$(a\#b)\#c=a\#(b\#c)$.

正确的是__________.(填序号)

20. $\odot O$ 与 $\odot D$ 相交于 A,B 两点, BC 是 $\odot D$ 的切线, 点 C 在 $\odot O$ 上, 且 $AB=BC$. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S, 则 $\odot D$ 的半径的最小值是__________.

三、B 组填空题(每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 已知 $1\leqslant x\leqslant 8$, 则函数 $f(x)=|x-3|+|x-5|+|x-7|$ 的最大值是__________, 最小值是__________.

22. α,β 是关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-4=0$ 的两个实根, 设 $y=\alpha^2+\beta^2$, 则 $y=f(m)$ 的解析式是__________, 值域是__________.

23. 已知 $\triangle ABC$ 三条边长分别为 $a=t^2+3$, $b=-t^2-2t+3$, $c=4t$, $t\in\mathbf{R}$, 则 $\triangle ABC$ 的最大内角是角__________, 它的度数等于__________.

24. 方程 $x^2+\log_{16}x=0$ 的解是__________; 使不等式 $x^2-\log_m x<0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立的 m 的取值范围是__________.

25. 若函数 $f(x)=\log_a(x^2-2ax+1-2a^2)$($a>0$, 且 $a\neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值是 2, 则 $a=$__________, $f(x)$ 的单调递增区间是__________.

高一　　第1试

1. 答案

(1) 选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	D	C	B	C	A	C	B	B	C	D

(2)A 组填空题

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答　案	$2\pi-\alpha$	$(-\infty,1]$	$(-1,+\infty)$	1	$\pm\frac{3}{2}$	$6\sqrt{2}$	$x<x^{x^x}<x^x$	6	①②③	$\frac{\sqrt{2S}}{2}$

(3)B 组填空题

题　号	21	22	23	24	25
答　案	12;4	$y=2m^2-8m+12\left(m\leqslant\frac{5}{2}\right)$; $[4,+\infty)$	A;120°	$\frac{1}{2}$;$\left[\frac{1}{16},1\right)$	$\frac{1}{2}$;$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$