

# 第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

## 高一 第 1 试试题

### 一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 集合  $M = \{x \mid y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{y \mid y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbf{R}\}$ , 则集合  $M \cap N = (\quad)$

- (A)  $\emptyset$ . (B)  $[-1, 4]$ . (C)  $[-1, 7]$ . (D)  $[0, 4]$ .

2. 设  $m, n$  是自然数, 条件甲:  $m^3 + n^3$  是偶数; 条件乙:  $m - n$  是偶数, 则甲是乙的( )

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分且必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

3. 已知直二面角  $\beta - l - \gamma$ , 直线  $a \subset$  平面  $\beta$ , 直线  $b \subset$  平面  $\gamma$ , 且  $a$  和  $b$  都不垂直于  $l$ , 那么,  $a$  与  $b$  ( )

- (A) 可能垂直, 但不可能平行. (B) 不可能垂直, 但可能平行.  
(C) 可能垂直, 也可能平行. (D) 不可能垂直, 也不可能平行.

4. 设  $S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的乘积, 若  $a_9 = 1$ , 则下面的等式中正确的是( )

- (A)  $S_1 = S_{19}$ . (B)  $S_3 = S_{17}$ . (C)  $S_5 = S_{12}$ . (D)  $S_8 = S_{11}$ .

5. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2012} = (\quad)$

- (A)  $-\sqrt{3}$ . (B) 0. (C)  $\sqrt{3}$ . (D)  $1006\sqrt{3}$ .

6. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 60^\circ, 2AB = 3BC$ , 则  $\tan A$  的值等于( )

- (A)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

7. Suppose  $\triangle ABC$  is a triangle with the side length of 2,  $D$  and  $E$  are moving points on the sides  $BC$  and  $AC$ .  $AD \perp BE$  at point  $M$ , then the length of  $M$ 's trajectory is( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ . (B)  $\frac{\pi}{3}$ . (C)  $\frac{\pi}{4}$ . (D)  $\frac{\pi}{6}$ .

(英汉词典: trajectory 轨迹)

8. 若  $f(1, 1) = 1234, f(x, y) = k, f(x, y + 1) = k - 3$ , 则  $f(1, 2012) = (\quad)$

- (A)  $-6033$ . (B)  $-4799$ . (C) 1235. (D) 2012.

9. 下面判断正确的是( )

- (A)  $b^2 - 4ac \geq 0$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有解的充分且必要条件.  
(B)  $b^2 - 4ac < 0$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  无解的充分且必要条件.  
(C)  $c \neq 0$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  无解的必要不充分条件.  
(D)  $b^2 - 4ac > 0$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有解的必要不充分条件.

10. 已知函数  $f(x) = m |x - 1|$  ( $m \in \mathbf{R}$ , 且  $m \neq 0$ ). 设向量  $\mathbf{a} = (1, \cos\theta)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 2\sin\theta)$ ,  $\mathbf{c} = (4\sin\theta, 1)$ ,  $\mathbf{d} = \left(\frac{1}{2}\sin\theta, 1\right)$ . 当  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  与  $f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$  的大小关系是( )

- (A)  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .  
 (B)  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .  
 (C)  $m > 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ;  $m < 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .  
 (D)  $m > 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ;  $m < 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .

二、A 组填空题(每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 设  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , 则在  $[0, 2\pi)$  内, 终边与  $\alpha$  角的终边关于  $x$  轴对称的角是\_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = 3^{-|\log_2 x|} - 4|x - 1|$  的值域是\_\_\_\_\_.

13. 若  $a, b, c$  是三个互不相等的实数, 且满足关系式  $b^2 + c^2 = 2a^2 + 16a + 14$ ,  $bc = a^2 - 4a - 5$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 若  $a, b$  是正实数, 且  $a + b = 2$ , 则  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$  的最小值是\_\_\_\_\_.

15.  $y = a \sin(ax + b) + b$ , if the minimum value of  $y$  is  $\frac{1}{2}$ , the maximum value is  $\frac{5}{2}$ , then  $ab =$ \_\_\_\_\_.

16. 设点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心,  $GA = 2\sqrt{3}$ ,  $GB = 2\sqrt{2}$ ,  $GC = 2$ . 则  $\triangle ABC$  的面积 =\_\_\_\_\_.

17. 已知  $0.8 < x < 0.9$ , 若将  $x, x^x, x^{x^x}$  按从小到大的顺序排列, 应当是\_\_\_\_\_.

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项之和是  $S_n$ , 若  $S_8 \leq 5$ ,  $S_{11} \geq 23$ , 则  $a_{10}$  的最小值是\_\_\_\_\_.

19. 若  $a \# b = a + b - ab$ , 则下列等式中:

- ①  $a \# b = b \# a$ .      ②  $a \# 0 = a$ .      ③  $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$ .

正确的是\_\_\_\_\_.(填序号)

20.  $\odot O$  与  $\odot D$  相交于  $A, B$  两点,  $BC$  是  $\odot D$  的切线, 点  $C$  在  $\odot O$  上, 且  $AB = BC$ . 若  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 则  $\odot D$  的半径的最小值是\_\_\_\_\_.

三、B 组填空题(每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 已知  $1 \leq x \leq 8$ , 则函数  $f(x) = |x - 3| + |x - 5| + |x - 7|$  的最大值是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_.

22.  $\alpha, \beta$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$  的两个实根, 设  $y = \alpha^2 + \beta^2$ , 则  $y = f(m)$  的解析式是\_\_\_\_\_, 值域是\_\_\_\_\_.

23. 已知  $\triangle ABC$  三条边长分别为  $a = t^2 + 3$ ,  $b = -t^2 - 2t + 3$ ,  $c = 4t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 则  $\triangle ABC$  的最大内角是角\_\_\_\_\_, 它的度数等于\_\_\_\_\_.

24. 方程  $x^2 + \log_{16} x = 0$  的解是\_\_\_\_\_; 使不等式  $x^2 - \log_m x < 0$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上恒成立的  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

25. 若函数  $f(x) = \log_a(x^2 - 2ax + 1 - 2a^2)$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在  $\mathbf{R}$  上的最大值是 2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $f(x)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

