第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 集合 $P=\{x \mid |x|\leqslant 1, x\in \mathbf{R}\}$,$Q=\{x \mid |\sqrt{x}-1|\leqslant 1, x\in \mathbf{Z}\}$,则 $P\cap Q=$(　　)

(A) $(0,1)$.　(B) $\{0,1\}$.　(C) $[0,1]$.　(D) $[-1,1]$.

2. 已知 $x>0$,$A=\log_3(1+\sqrt{x})$,$B=\log_4 x$,则 A 与 B 的大小关系是(　　)

(A) $A>B$.　(B) $A=B$.　(C) $A<B$.　(D) 随 x 的值而定.

3. 有若干同心圆,其半径是公比为 $q(q>1)$ 的等比数列,相邻的两个圆组成一个圆环,则这些圆环的面积(　　)

(A) 不是等比数列.　(B) 是等比数列,公比为 q.

(C) 是等比数列,公比为 q^2.　(D) 是等比数列,公比为 q^2-1.

4. 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,则“$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向”是“$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$”的(　　)

(A) 充分不必要条件.　(B) 必要不充分条件.

(C) 充分且必要条件.　(D) 既不充分也不必要条件.

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $3^x+5^{-y}\leqslant 3^y+5^{-x}$,则下列关系式中成立的是(　　)

(A) $e^{x-y}\geqslant 1$.　(B) $e^{y-x}\geqslant 1$.　(C) $\ln(x-y)\geqslant 0$.　(D) $\ln(y-x+1)\geqslant 1$.

6. The range of values for the function $y=x+\sqrt{1-x^2}$ is (　　)

(A) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.　(B) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　(C) $[-1,\sqrt{2}]$.　(D) $(-1,\sqrt{2})$.

7. 方程 $x+y-2+x\sqrt{x^2+2}+(y-2)\sqrt{y^2-4y+6}=0$ 的正整数解的个数是(　　)

(A) 1.　(B) 2.　(C) 5.　(D) 无穷多.

8. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1=a$,$AB=2a$,M、N、E 分别是 AB、AC、A_1B_1 的中点,那么平面 BCE 与平面 MNE 所成二面角的余弦值是(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.　(C) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.　(D) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

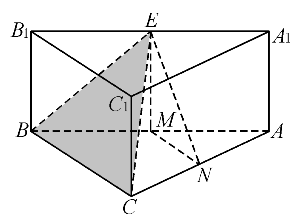

图1

9. 椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的内接正方形的面积和内接矩形的最大面积的比等于(　　)

(A) $\dfrac{3}{4}$.　(B) $\dfrac{4}{5}$.　(C) $\dfrac{5}{6}$.　(D) $\dfrac{7}{8}$.

10. 定义:过双曲线焦点的直线与双曲线交于 A、B 两点,则线段 AB 称为该双曲线的焦点弦.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$,那么过该双曲线左焦点,长度为整数且不超过2012的焦点弦的条数是(　　)

(A) 4005.　(B) 4018.　(C) 8023.　(D) 8036.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足:$f(x)+g(x)=x^2+x+1$,则 $g(2)=$__________.

12. 函数 $y=e^{2x+1}-e^x(x\in\mathbf{R})$ 的单调递减区间是__________.

13. 平面直角坐标系中,已知点 $A(2,1)$,动点 B 在 x 轴上,动点 C 在直线 $y=x$ 上,那么 $\triangle ABC$ 的周长的最小值是__________.

14. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$,则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=$__________.

15. 设 $A=\left\{n\left|\dfrac{2011^n+2013^n}{2012}\in\mathbf{Z}^+,n\in\mathbf{Z}^+\right.\right\}$,将 A 中的元素从小到大地排列为:$a_1,a_2,\cdots$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2012}=$__________.

16. 已知数列 $\{x_n\}$ 中,$x_1=3$,$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n}$,则数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_n=$__________.

17. 设 A 是半径为 5 的 $\odot O$ 上的一个定点,单位向量 $\boldsymbol{b}$ 在 A 点处与 $\odot O$ 相切,点 P 是 $\odot O$ 上的一个动点,且点 P 与点 A 不重合,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围是__________.

18. Suppose the equation $x^2-2kx+k^2-1=0$ has two unequal real roots x_1, x_2, which satisfy $|x_i-1|<3(i=1,2)$. Then the range of values for the real number k is __________.

19. 如图 2,在正四面体 $ABCD$ 中,P_1,P_2 是 BC 的 3 等分点,过这两个分点分别作 CD 的平行线 P_1Q_1,P_2Q_2,其中 Q_1,Q_2 在 BD 上,则点 B 到平面 AP_1Q_1,AP_2Q_2 的距离之比是__________.

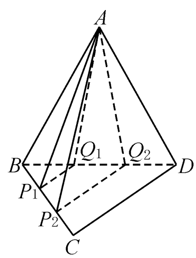

图 2

20. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2,正三角形 AF_1F_2 的一边 AF_1 与双曲线左支交于点 B,且 $\overrightarrow{AF_1}=4\overrightarrow{BF_1}$,则双曲线 C 的离心率的值是__________.

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 一个正数的小数部分、整数部分及它自身构成等比数列,则该数的整数部分是__________,小数部分是__________.

22. 已知正三棱锥的侧面积与底面积之比等于 λ,则此三棱锥的侧棱与底面边长的比等于__________,侧棱与底面所成角的正弦值等于__________.

23. 设曲线 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n,则 $x_n=$__________,$\log_{2012}x_1+\log_{2012}x_2+\cdots+\log_{2012}x_{2011}=$__________.

24. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$,则 $f(x)$ 的最小正周期是__________.若函数 $f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{b}=(m,n)$ 平移后,所得的图象与函数 $g(x)=\sin 2x+1$ 的图象重合,且 $|m|<\dfrac{\pi}{2}$,则 $\boldsymbol{b}=$__________.

25. 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{|\ln x|}, & 0<x\leqslant 5,\\ -x+10, & x>5.\end{cases}$ 若方程 $f(x)=k$(k 是常数)有三个不同的实数根 a,b,c,且 $a<b<c$,则 $ab=$__________,c 的取值范围是__________.

高二　　第 1 试

1. 答案

(1) 选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	B	D	C	A	B	C	A	D	B	C

(2)A 组填空题

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答　案	2	$(-\infty,-(1+\ln 2)]$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}-2$	2012^2	$\dfrac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}-1}$	$[-5,5]$	$(-1,3)$	$\sqrt{2}:3$	$\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}$

(3)B 组填空题

题　号	21	22	23	24	25
答　案	$1;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{\lambda^2+3};\sqrt{\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+3}}$	$\dfrac{n}{n+1};-1$	$\pi;\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$	$1;(5,9)$