

第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 给出以下五个函数:

$$\textcircled{1}y = |x|; \quad \textcircled{2}y = \log_2 |x|; \quad \textcircled{3}y = \frac{3}{|x|}; \quad \textcircled{4}y = x^{\frac{1}{2}}; \quad \textcircled{5}y = 3^x.$$

其中,值域是一切实数的是()

- (A) ②,④. (B) ①,②. (C) ③. (D) ②.

2. 已知 $p, q, a, b, c \in \mathbf{R}$, 并且 $2a = p + q, bc = pq \neq 0$, 则关于 x 的方程 $bx^2 - 2ax + c = 0$ 的根的情况是()

- (A) 无实根. (B) 有两个相等实根.
(C) 有两个不等实根. (D) 有两个实根.

3. If polynomial $2x^3 - 5x^2 + 1$ was divided by $x - 2$, the remainder will be ()

- (A) 3. (B) -3. (C) 5. (D) -5.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的圆心从原点 O 连续地向右平移点到点 $A(1, 0)$, 在这过程中, 圆面内(含边界) 包含的整点(横、纵坐标都是整数的点) 的个数不可能是()

- (A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

5. 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $\log_a(4 - 3x) > -\log_{\frac{1}{a}}(2 + x)$ 的解是()

- (A) $x > \frac{1}{2}$. (B) $-2 < x < \frac{4}{3}$.
(C) $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$. (D) $-2 < x < \frac{1}{2}$.

6. 要想得到函数 $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象()

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位. (B) 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位.
(C) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位. (D) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位.

7. In the triangle ABC , if the interior angles satisfy $\sin(A - B) = \frac{3}{5}\sin C$, then $\frac{\tan A}{\tan B} =$

- ()
(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 5.

8. 函数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 的图象关于()

- (A) 点 $(1, 2)$ 成中心对称. (B) 点 $(-1, 2)$ 成中心对称.
(C) 直线 $x = 1$ 成轴对称. (D) 直线 $x = -1$ 成轴对称.

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 下列结论中一定成立的是()

- (A) $\log_{\sin C} \frac{\sin A}{\cos B} > 0$. (B) $\log_{\sin C} \frac{\sin A}{\sin B} > 0$.
(C) $\log_{\cos C} \frac{\cos A}{\cos B} > 0$. (D) $\log_{\cos C} \frac{\cos A}{\sin B} > 0$.

10. 如图1, $ABCD-GHEF$ 是棱长为 a 的正方体, 点 M 和 N 分别是 $\triangle BEH$ 和 $\triangle HEG$ 的内心, 则线段 MN 的长是 ()

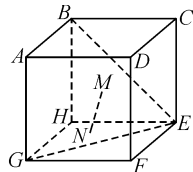


图 1

- (A) $\frac{1}{2}a$. (B) $\frac{2}{5}a$. (C) $(\sqrt{2}-1)a$. (D) $(2-\sqrt{2})a$.

二、A 组填空题 (每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 设 $a = \frac{1}{4}$, $b = \log_9 \frac{5}{3}$, $c = \log_8 \sqrt{3}$, 用“>”连结 a, b, c , 则是_____.

12. 函数 $y = 2^{x-1}$ 与 $y = 2^{1-x}$ 的图象关于直线_____对称.

13. 若 M, N, P, Q 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 D_1C_1, BC, A_1D_1, DC 的中点, 则 MN 与 PQ 所成角的正弦值是_____.

14. 若函数 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2+1}$, 则 $f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{1}{2011}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \dots + f(2011) + f(2012) + f(2013)$ 的值是_____.

15. 已知 $\sin\theta = \frac{m^2+1}{4|m|}$, 则 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的取值范围是_____.

16. 已知 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3^x + \sqrt{3}}$, 则 $f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(\lg 2) + f(\lg 5) =$ _____.

17. Given set $A = \{x \mid x^2 + 2x + 3 + a^2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, set $B = \{x \mid 2^{x^2+2x+3} \geq a, x \in \mathbf{R}\}$. If $A \cup B = \mathbf{R}$, then the value range of the real number a is_____.

18. 已知点 $C(3,1)$, 点 A 在直线 $y = x$ 上, 点 B 在 x 轴上, 则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值是_____.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $a + c = 2b, B = 30^\circ$, 并且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径的长是_____.

20. 若不等式 $4^{x-1} - m \cdot 2^x + m > 0$ 对一切 $x \in [2, 4]$ 都成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

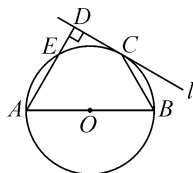


图 2

三、B 组填空题 (每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 如图 2 所示, 圆 O 的直径 $AB = 6, C$ 为圆周上一点, $BC = 3$, 过 C 作圆 O 的切线 l , 从 A 作 l 的垂线 AD , 垂足为 D , 交圆 O 于 E , 则 $AE =$ _____, $CD =$ _____.

22. 函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

23. 已知函数 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$, $g(x) = x^2 - 6x + 7$, 则这两个函数的值域的交集是_____. 若在集合 A 中, 对任意 $a \in A$, 总存在 b 使得 $g(a) = f(b)$ 成立, 则 $A =$ _____.

24. 已知 xOy 坐标平面内的点 $A(1,1), B, C, D, E$, 若 B 在曲线 $y = \sqrt{x}$ 上, C, D, E 在正 x 轴上, 并且 $OC < OD < OE$, $\triangle ADC$ 和 $\triangle BED$ 都是正三角形, 则直线 DB 的方程是_____, 点 B 的横坐标是_____.

25. 侧棱长都是 6 的三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp PB, PA \perp PC, \angle BPC = 60^\circ$, M, N 分别是 PA, BC 的中点, 则 $MN =$ _____, 三棱锥 $A-BMN$ 的体积是_____.

附加题 (每小题 10 分, 共 20 分.)

1. 若点 $P(-3,1), Q(3,4)$ 是某正方形的两个顶点, 点 $R(x,y)$ 是这个正方形的另一个顶点并且在直线 PQ 的下方, 则点 R 的坐标是_____.

2. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y + z = 1$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \sqrt{xyz} \leq 1$ 恒成立, 则实数 λ 的最大值为_____.

高一 第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	B	C	C	B	B	A	D	C
题号	11		12		13		14		15	
答案	$c > a > b$		$x = 1$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		2012.5		$\left[-1, \frac{1}{2}\right]$	
题号	16		17		18		19		20	
答案	3		$a \leq 4$		$2\sqrt{5}$		$\sqrt{3} + 1$		$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$	
题号	21		22			23				
答案	$3; \frac{3}{2}\sqrt{3}$		$-1; 2 + 2\sqrt{2}$			$[-1, 0); (3 - \sqrt{2}, 2] \cup [4, 3 + \sqrt{2})$				
题号	24						25			
答案	$y = \sqrt{3}x - (\sqrt{3} + 1); \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}$						$6; \frac{9\sqrt{3}}{2}$			
题号	附加题 1						附加题 2			
答案	$(6, -2)$ 或 $(0, -5)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$						$2\sqrt{3}$			