

# 第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

## 高一 第 1 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 如果  $a^b = c, c > 0$ , 则( )  
 (A)  $b \in \mathbf{R}$ . (B)  $b \in [0, +\infty)$ . (C)  $b \in [1, +\infty)$ . (D)  $b \in (-\infty, -1]$ .

2. 若  $x=1, y=0$  是关于  $x$  和  $y$  的方程  $(2m^2 - m + 1)x + (m^2 + 1)y = -4m + 3$  的一组解, 则实数  $m$  的值是( )

(A)  $-2$ . (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $-2$  或  $\frac{1}{2}$ . (D)  $2$  或  $-\frac{1}{2}$ .

3. 若  $\lg 3 = 0.4771$ , 则以下四个结论中错误的是( )

(A)  $\lg \frac{1}{3} = -0.4771$ . (B)  $\lg \frac{3}{10} = -0.5229$ .

(C)  $\lg 300 = 2.5229$ . (D)  $\lg \sqrt{99} < 1$ .

4. The domain of the function  $y = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{\lg x}$  is ( )

(A)  $\{x \mid 0 < x < 3\}$ . (B)  $\{x \mid 0 < x < 3 \text{ and } x \neq 1\}$ .

(C)  $\{x \mid 0 < x \leq 3 \text{ and } x \neq 1\}$ . (D)  $\{x \mid 0 < x \leq 3\}$ .

(英汉小词典: domain 定义域)

5. 当正整数  $n > 1$  时, 若  $n^0, n, n^2, \dots, n^n$  分别除以 17 所得余数至少有两个相同, 则  $n$  的最小值是( )

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

6. 若周期为 6 的函数  $f(x)$  在区间  $(-3, 3]$  内单调递减, 那么在以下的数中, 最大的是( )

(A)  $f(8)$ . (B)  $f(-4.4)$ . (C)  $f(-7)$ . (D)  $f(-5\sqrt{2})$ .

7. 给出以下四个方程:

(1)  $\lg x = 1 - x$ ; (2)  $2^x = \frac{1}{x}$ ; (3)  $2 - x^2 = \lg |x|$ ; (4)  $\sin x = |x|$ .

其中, 有唯一解的是( )

(A) (1), (2), (3). (B) (1), (2), (4). (C) (1), (3), (4). (D) (2), (3), (4).

8. 如图 1,  $ABCD - EFMN$  是一个长方体,  $\triangle BFN$  中,  $\angle BFN = 90^\circ$ ,  $\angle BNF = 30^\circ$ ,  $BF = m$ , 则该长方体体积的最大值是( )

(A)  $m^3$ . (B)  $\sqrt{3}m^3$ . (C)  $\frac{3}{2}m^3$ . (D)  $3m^3$ .

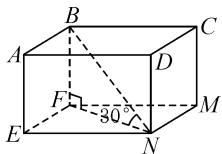


图 1

9. 如果关于  $x$  的方程  $(x-2)(x^2 - mx + \frac{1}{2}) = 0$  的三个根是某三角形的

三条边的长, 那么, 实数  $m$  的取值范围是( )

(A)  $m > 2$ . (B)  $2 \leq m \leq \sqrt{6}$ . (C)  $2 < m \leq \sqrt{6}$ . (D)  $2 < m < \sqrt{6}$ .

10. 已知  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$ , 则  $f[\log_2(\log_5 4)] + f[\log_2(\log_4 5)] =$  ( )

(A) 0. (B) 1. (C)  $\sqrt{2}$ . (D) 2.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 已知函数  $f(x) = e^{|x-a|}$  ( $a$  为常数),若  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数,则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 已知  $\odot O$  和  $\odot P$  的半径分别是 2 和 3,若  $\odot O, \odot P, \odot M$  两两相外切,且  $\angle OMP = 90^\circ$ ,则  $\odot M$  的半径是\_\_\_\_\_.

13. 若  $U = \{n \mid n \text{ 是小于 } 37 \text{ 的正偶数}\}, V = \{n \mid n \in U \text{ 且 } n \text{ 有奇数个约数}\}, W = \{n \mid n \in U \text{ 且 } n \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\}$ ,则  $V \cap W =$ \_\_\_\_\_.

14. 设  $a > 0$ ,且  $a \neq 1$ ,若函数  $f(x) = a^{\lg(x^2 - 2x + 3)}$  有最大值,则不等式  $\log_a(x^2 - 5x + 7) > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, $AC = 4\sqrt{3}, \angle B = 60^\circ$ ,则  $BC$  长度的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知集合  $M = \{x \mid x^2 - 4 > 0\}$ ,集合  $N = \{x \mid x^2 - 6x + a - 4 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$ ,若  $M \cap N$  有 4 个子集,则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

17. 已知  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 - m^2x + n = 0$  的两个实数根, $y_1, y_2$  是方程  $y^2 - 3my + 6 = 0$  的两个实数根,其中  $m, n$  是常数,且  $x_1 + y_1 = 2, x_2 + y_2 = 2$ ,则  $8m + n =$ \_\_\_\_\_.

18. 已知一列数:1,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1,⋯,它的各项若不是 1 就是 2,并且在第  $k$  个 1 和第  $(k+1)$  个 1 之间有  $(2k-1)$  个 2,那么,前 2014 个数的和为\_\_\_\_\_.

19. 已知  $y = \begin{cases} x - \frac{1}{x} (1 \leq x < 2), \\ x + \frac{16}{x} (2 \leq x \leq 6). \end{cases}$  则  $y$  的值域是\_\_\_\_\_.

20. The radius of the circle  $O$  is 2. The chord  $AB$  is equal to the chord  $CD$ . Both of the distance from the 2 chords to point  $O$  are 1. The area range of the quadrilateral  $ABCD$  is \_\_\_\_\_.

(英汉小词典:radius 半径;chord 弦;quadrilateral 四边形)

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 6x + n = 0$  有两个不同的正整数解,则自然数  $n =$ \_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_.

22. 已知关于  $x$  的不等式  $mx^2 + mx - 2 \leq 0$ .

(1) 若其解集为  $[-2, 1]$ ,则实数  $m =$ \_\_\_\_\_;

(2) 若不等式  $mx^2 + mx - 2 \leq 0$  在  $[-3, 2]$  上成立,则实数  $m \in$ \_\_\_\_\_.

23. 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 (x \leq 0), \\ 3x - 2 (x > 0). \end{cases}$  则  $f(f(-2)) =$ \_\_\_\_\_;若  $|f(x)| \geq ax$  在  $x \in [-1, 1]$

上恒成立,则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

24. 已知  $O$  是坐标原点,过点  $A(2, 1)$  的直线与  $x$  轴正半轴交于点  $C$ ,与  $y$  轴正半轴交于点  $D$ ,则  $\triangle OCD$  的面积的最小值是\_\_\_\_\_,此时  $\triangle OCD$  的外接圆的面积是\_\_\_\_\_.

25. 

1	2	3	4	5	⋯	$n$
3	5	7	9	11	⋯	$(2n-1)$
8	12	16	20	⋯	$(4n-4)$	
20	28	36	⋯	$(8n-12)$		

⋯  
图 2

观察图 2 呈现的规律,可知

(1) 当  $n=5$  时,数表中最下面一行的数是\_\_\_\_\_;

(2) 数表的最下面一行用  $n$  表示是\_\_\_\_\_.

## 高一 第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	C	C	C	D	B	C	D	A
题号	11		12		13		14		15	
答案	$(-\infty, 1]$		1		$\{36\}$		$(2, 3)$		$(0, 8]$	
题号	16		17		18		19		20	
答案	$[9, 12)$		2		3983		$\left[0, \frac{3}{2}\right) \cup [8, 10]$		$(3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}]$	
题号	21		22		23		24		25	
答案	5, 8		1; $\left[-8, \frac{1}{3}\right]$		4; $[-1, 0]$		4; $5\pi$		48; $(n+1)2^{n-2}$	