

第二十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第 1 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 计算 $\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100}$ 的值是()

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2.

2. 下列函数中,既是偶函数,又是 $(0, +\infty)$ 上的增函数的是()

- (A) $y = |x - 1|$. (B) $y = -x^2 + 1$. (C) $y = 2^{-|x|}$. (D) $y = \log_2 |x|$.

3. 如图 1 所示的几何体的俯视图是()

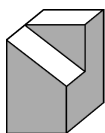
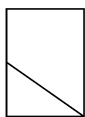
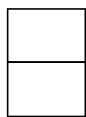


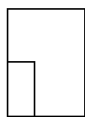
图 1



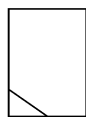
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 把数列 $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ 依次按一项、二项、三项、四项地循环排列: $(2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18, 20); (22), (24, 26), (28, 30, 32), (34, 36, 38, 40); \dots$, 则第 104 个括号内的所有数之和为()

- (A) 2036. (B) 2052. (C) 2068. (D) 2084.

5. 方程 $x^2 - y^2 + x + y = 12$ 的整数解有()

- (A) 4 对. (B) 6 对. (C) 8 对. (D) 12 对.

6. In rectangular coordinate system xOy , line $y = -\frac{4}{3}x + 4$ intersects with x -axis and y -axis at point A and B , respectively. Rotate $\triangle AOB$ on point B 90 degrees clockwise to $\triangle A'O'B$. Then the coordinate of the point A' is()

- (A) $(-3, 1)$. (B) $(-2, 5)$. (C) $(-4, 1)$. (D) $(-4, 3)$.

(英汉小词典: rotate 旋转; clockwise 顺时针方向地)

7. 函数 $f(x) = (x^2 - 2014x - 2015)\ln(x - 2013)$ 的零点的个数为()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

8. 当 $x \in (2, 3)$ 时, 若不等式 $\log_a(x - 1) - (x - 2)^2 > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

- (A) $(0, \frac{1}{2}]$. (B) $[\frac{1}{2}, 1)$. (C) $(1, 2]$. (D) $[2, +\infty)$.

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3, & x < 0, \end{cases}$ 若 $|x_1| < |x_2|$, 则下列不等式中恒成立的是()

- (A) $f(x_1) + f(x_2) > 0$. (B) $f(x_1) + f(x_2) < 0$.
(C) $f(x_1) - f(x_2) > 0$. (D) $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

10. 已知正整数 x, y, z 满足 $\begin{cases} xy + yz = 19, \\ x^2 + 10y^2 + z^2 - 6xy + 2yz = 169, \end{cases}$ 则 xyz 的值是()

- (A) 48. (B) 60. (C) 88. (D) 60 或 88.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 计算: $0.00032^{0.8} =$ _____.

12. 若函数 $f(x) = \log_2 |ax - 1|$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称,则 $a =$ _____.

13. $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + k \times k!$ ($k \geq 4$) 的末位数字是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8, AC = 10, BC = 12$,若 BD 是 AC 边上的中线,则 $BD =$ _____.

15. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2014x + 2013 < 0\}, B = \{x \mid \log_2 x < m\} (m \in \mathbf{N}^*)$,若 $A \subseteq B$,则 m 的最小值是_____.

16. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c$ 的值域是 $[0, +\infty)$,则 $a^2 + c^2 + a + c$ 的最小值是_____.

17. As shown in the Fig. 2. Given $\triangle ABC$ with $BC = 4$ and circle A with radius 2. BC is tangent to circle A at D . The circle A intersects with AB and AC at point E and F , respectively. $\angle EDF = 140^\circ$. Then the area of the shaded portion is _____.

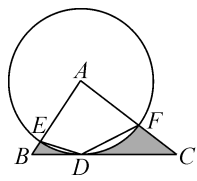


Fig. 2

(英汉小词典:tangent 相切的)

18. 如果 $-1, a, b, c, -9$ 成等比数列,且 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,则 $x_1^2 + x_2^2 =$ _____.

19. 在平面直角坐标系中,过点 $P(a, b) (a \neq 0, b \neq 0)$ 的直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积是定值 M ,则这样的直线可能有_____条.

20. 若集合 $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$ 的某些子集满足条件:没有一个数是另一个数的 2 倍,则这样的子集中所含元素的个数最多是_____.

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 当 $x > 3$ 时,函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{x-3} - 1 \right)$ 的最大值是_____,此时 $x =$ _____.

22. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,公比 $q = 2$,前 99 项的和是 56,则 $a_1 =$ _____, $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{99} =$ _____.

23. 如图 3,在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1, BC = \sqrt{3} + 1, AD = \sqrt{6}, \angle ABC = 120^\circ, \angle DAB = 75^\circ$,则 $\angle BAC =$ _____, $CD =$ _____.

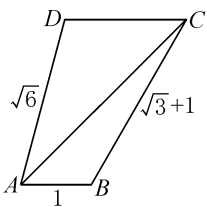


图 3

24. 设函数 $f_1(x) = 2 - x, f_2(x) = -x^2 + 6x - 4, f(x) = \begin{cases} f_1(x), & f_1(x) \geq f_2(x), \\ f_2(x), & f_2(x) > f_1(x). \end{cases}$ 则 $f(2015) =$ _____ ;若函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上

的最大值为 $f(a)$,则 a 的取值范围是_____.

25. 设函数 $f(x) = |2x - m| + 4x$.

(1) 当 $m = 2$ 时,满足 $f(x) \leq 1$ 的 x 的取值范围是_____;

(2) 若 $f(x) \leq 2$ 的解集为 $\{x \mid x \leq -2\}$,则 $m =$ _____.

高一 第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	C	C	C	C	C	D	D
题号	11		12		13		14		15	
答案	0.0016		$\frac{1}{2}$		9		$\sqrt{79}$		11	
题号	16		17		18		19		20	
答案	4		$4 - \frac{8}{9}\pi$		6		2, 3 或 4		1343	
题号	21			22			23			
答案	-2; 4			$\frac{56}{2^{99}-1}; 32$			$45^\circ; \sqrt{3}$			
题号	24					25				
答案	$-2013; [3 - \sqrt{3}, 3]$					$(-\infty, -\frac{1}{2}]; -14 \text{ 或 } 6$				